* المعادلة المتجانسة:

- نقول عن معادلة تفاضلية أنها متجانسة إذا أمكن كتابتها على النحو التالي $\frac{dy}{dx} = y' = f(y/x)$

- لنفرض أن $v = \frac{y}{x} \Leftarrow y = x \cdot v \Leftarrow dy = x \cdot dv + v \cdot dx$

أي أن المعادلة تتؤول إلى معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات

← في بعض الأحيان نعطى المعادلة التفاضلية على الشكل:

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$$ حيث $ax+by+c$ معادلة مستقيم:

هذه المعادلة ليست متجانسة ولكن يمكن أن نرد إلى متجانسة وهنا نميز الحالات الآتية:

① $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$

- وهي معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات مباشرة وفي هذه الحالة المستقيمين منطبقين

② $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \neq \frac{c}{c_1}$

في هذه الحالة المستقيمان متوازيان

المستقيم $ax_1+by_1+c_1=0$ يوازي المستقيم $ax+by+c=0$

عندئذ نفرض أن $v = ax+by \Leftarrow v' = a+by'$

وتصبح في هذه الحالة المعادلة التفاضلية عندئذ متجانسة وتؤول إلى معادلة قابلة لفصل المتحولات.

Scanned by CamScanner

③ $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1} \neq \frac{c}{c_1}$ المستقيمين متقاطعان

عندئذ نفرض أن $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$ حيث (x_0, y_0) هي نقطة تقاطع المستقيمين

$ax + by + c = 0$

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$

مثال: حل المعادلة $(x^2 + y^2)dx - 2xy\,dy = 0$

الحل:

$$(1 + \frac{y^2}{x^2})dx - \frac{2y}{x}dy = 0 \Rightarrow (1 + \frac{y^2}{x^2})dx = 2\frac{y}{x}.dy$$

أصبحت من الشكل: $y' = f(\frac{y}{x})$ ، $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{y^2}{x^2}}{2\frac{y}{x}}$

نفرض $v = \frac{y}{x} \Leftarrow y = vx \Leftarrow dy = v.dx + x.dv$

نعوض في المعادلة: $\frac{dy}{dx} = v + x.\frac{dv}{dx}$

$$v + x.\frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2}{2v} \Rightarrow x.\frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2 - 2v^2}{2v} = \frac{1 - v^2}{2v}$$

$$\Rightarrow \frac{2v}{1 - v^2}dv = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{-2v.}{1 - v^2}dv = \int \frac{dx}{x} + c$$

$$\Rightarrow -\ln|1 - v^2| = \ln x + \ln c$$

$$\Rightarrow \ln x + \ln|1 - v^2| = \ln(c) \Rightarrow x(1 - v^2) = c$$

$$\Rightarrow x(1 - \frac{y^2}{x^2}) = c \Rightarrow \boxed{x^2 - y^2 = cx}$$

Scanned by CamScanner

وظيفة: $2x^2 \cdot y' - y(2x+y) = 0$ حيث $y(e) = e$

مثال 2: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y-3}{x+y-2}$

الحل: نلاحظ أن المستقيمين $\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ x+y-2=0 \end{cases}$ مستقيمين متقاطعان.

من أجل ذلك نحدد نقطة التقاطع، مستغلين الحل المشترك للمعادلتين

فنجد $(x_0, y_0) = (1,1)$ لهذا نفرض أن

$\begin{cases} x = u+1 \\ y = v+1 \end{cases}$ نفرض بالمعادلة المعطاة $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$

$$\frac{dv}{du} = \frac{2(u+1)+v+1-3}{u+1+v+1-2} = \frac{2u+v}{u+v} = \frac{u\left(2+\frac{v}{u}\right)}{u\left(1+\frac{v}{u}\right)}$$

$$= \frac{2+\frac{v}{u}}{1+\frac{v}{u}}$$ وهذه المعادلة متجانسة

من أجل الحل نفرض

$$z = \frac{u}{v} \Leftarrow v = u \cdot z \Leftarrow dv = u \cdot dz + du \cdot z$$

$$\frac{dv}{u} = u \cdot \frac{dz}{du} + z \Leftarrow u \cdot \frac{dz}{du} + z = \frac{2+z}{1+z}$$

$$\Rightarrow u \cdot \frac{dz}{du} = \frac{2+z}{1+z} - z = \frac{2+z-z-z^2}{1+z}$$

نكامل الطرفين:

$$\int \frac{1+z}{2-z^2}\, dz = \int \frac{du}{u} + C$$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow \int \frac{1}{2-z^2}dz + \int \frac{z}{2-z^2}dz = \ln u + \ln(c) \quad (*)$$

لإجراء التكامل $\int \frac{dz}{2-z^2}$ نقوم بتكسير إلى عواملها:

$$\frac{1}{2-z^2} = \frac{A}{\sqrt{2}-z} + \frac{B}{\sqrt{2}+z} \Rightarrow \frac{1}{2-z^2} = \frac{\sqrt{2}/4}{\sqrt{2}-z} + \frac{\sqrt{2}/4}{\sqrt{2}+z}$$

$$\int \frac{dz}{2-z^2} = \sqrt{2}/4 \int \frac{dz}{\sqrt{2}-z} + \sqrt{2}/4 \int \frac{dz}{\sqrt{2}+z}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{4}\ln|\sqrt{2}-z| + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln|\sqrt{2}+z|$$

نعوض في $(*)$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{4}\ln|\sqrt{2}-z| + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln|\sqrt{2}+z| - \frac{1}{2}\ln|2-z^2| = \ln u + \ln c$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{4}\ln\left|\sqrt{2} - \frac{y-1}{x-1}\right| + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\sqrt{2} + \frac{y-1}{x-1}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|2 - \frac{(y-1)^2}{(x-1)^2}\right| =$$

$$= \ln|x-1| + \ln c$$

يتبع

مثال 3 أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-5}{x+y+1}$$

الحل: بما أن المستقيمين متوازيان نفرض أن $u = x+y$

وبالتالي: $u' = 1 + y' \Leftarrow \frac{du}{dx} - 1 = \frac{u-5}{u+1}$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u-5}{u+1} + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{2u-4}{u+1}$$

Scanned by CamScanner

$$\frac{v+1}{2v-u}\,dv = dx$$

نكامل: $\int \frac{v+1}{2v-4}\,dv - x + c \Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{v+1}{v-2}\,dv = x + c$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{v-2+3}{v-2}\,dv = x + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int dv + \frac{3}{2}\int \frac{dv}{v-2} = x + c \Rightarrow \frac{1}{2}v + \frac{3}{2}\ln|v-2| = x + c$$

$$\boxed{\frac{1}{2}(x+y) + \frac{3}{2}\ln|x+y-2| = x + c}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية.

وظيفة (1) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-3}{x-y-1}$

وظيفة (2) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y-1}{4x+2y+5}$

انتهت المحاضرة ن &

Scanned by CamScanner